Méthode de Householder

C'est une méthode algorithmique permettant de résoudre un système linéaire :

$$Ax = b \qquad (*)$$

où $x, b \in \mathbb{R}^n$ et A désigne une matrice $n \times n$ à coeff. réels, inversible.

Notons $(x|y)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Si u est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, la réflexion /à l'hyperplan H_u orthogonal à u est :

$$s_u : x \longmapsto x - 2\,(x|u).u$$

On va successivement multiplier à gauche la matrice Ax par des matrices R_i de réflexions /à des hyperplans pour obtenir une matrice triangulaire supérieure $T = R_n \dots R_1 A$. Le système $(*)$ devient :

$$Tx = R_n \dots R_1 b$$

que l'on résout facilement.

* <u>1-pas</u> : Notons $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de A. Il existe une réflexion hyperplane s_1 transformant c_1 en $\alpha e_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $\|c_1\| = \|\alpha e_1\| = |\alpha|$.

Une fois α déterminé tel que $|\alpha| = \|c_1\|$, la seule réflexion hyperplane s_1 transformant c_1 en αe_1 est celle de base l'hyperplan H_1 orthogonal à $c_1 - \alpha e_1$, soit :

$$s_1(x) = x - 2\left(x \,\middle|\, \frac{c_1 - \alpha e_1}{\|c_1 - \alpha e_1\|}\right) . \frac{c_1 - \alpha e_1}{\|c_1 - \alpha e_1\|}$$

Notons R_1 la matrice de s_1 dans la base canonique.
(Si $c_1 \neq \alpha e_1$, sinon $c_1 = \alpha e_1$ et on prend $R_1 = I$ et $s_1 = Id$)

$Ax = b$ devient $R_1 A x = R_1 b$

$$\text{où } R_1 A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \ast \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

* <u>$(k+1)$-ième pas</u> : Supposons construites les matrices $R_1, \dots, R_k$ de réflexions hyperplanes telles que

$$R_k \dots R_1 A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k \end{matrix} & \ast \\ \hline 0 & A_k \end{array}\right)$$

En argumentant comme au 1er pas, mais avec la matrice A_k à la place de A, on obtient une matrice R'_{k+1} de réflexion hyperplane de $\mathbb{R}^{n-k}$ telle que :

$$R'_{k+1} \cdot A_k = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_{k+1} & \ast \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_{k+1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

Posons $R_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & R'_{k+1} \end{array}\right)$

Alors :

$$R_{k+1}(R_k \dots R_1 A) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & R'_{k+1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k \end{matrix} & \ast \\ \hline 0 & A_k \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k \end{matrix} & \ast \\ \hline 0 & R'_{k+1} A_k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha_1 & & \ast \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{k+1} \end{matrix} & \ast \\ \hline 0 & A_{k+1} \end{array}\right)$$

La récurrence aboutit.

Ccl : Au bout de n opérations, le système $Ax = b$ devient :

$$R_n \dots R_1 A x = R_n \dots R_1 b$$

où $R_n \dots R_1 A = T \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ est triangulaire.

NB :

1) Toutes les matrices R_k sont des matrices de réflexions de $\mathbb{R}^n$ car, au rang $k+1$:

$$R_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & R'_{k+1} \end{array}\right) \quad (\text{blocs de tailles } k \text{ et } n-k)$$

où R'_{k+1} est une matrice de réflexion hyperplane de $\mathbb{R}^{n-k}$.

En particulier $\det R_{k+1} = -1$.

2) La méthode de Householder est plus utilisée que la méthode du pivot de Gauss car elle est plus stable.

Sur le : "Pb de maths, écrit du capes, 1988-1992, Alg et géom. de Bories-Longuet et A. Lévy-Bruhl, 3e éd, Masson" p25, on lit :

" Le nbre d'opérations nécessaires pour résoudre un système par la méth. de Householder est de l'ordre de $\frac{4n^3}{3}$. Il est de l'ordre de n^3 pour la méth. du pivot de Gauss "

↘ voir 170193.3

Nbre d'opérations à effectuer pour résoudre un syst. lin. par la méthode de Householder :

1) Le calcul de $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$ nécessite $n + (n-1) + 1 = 2n$ opérations.
Le calcul de $c_1 - \alpha e_1$ nécessitera n opérations, et celui de $\frac{c_1 - \alpha e_1}{\|c_1 - \alpha e_1\|} \doteq u$
$2n + n = 3n$ opérations supplémentaires.
On connait donc u moyennant $2n + n + 3n =$ 6n opérations.

2) Calculer $s_1(x) = x - 2(x|u)u$ connaissant x nécessite alors

$$n + (n-1) + 1 + n + n = 4n \text{ opérations.}$$

Connaître la matrice R_1 revient alors à déterminer $s_1(e_1), \dots, s_1(e_n)$ et nécessite $n \times (4n) = 4n^2$ opérations.

Ccl : Avoir R_1 à partir de la matrice A nécessite

$$N(n) = 4n^2 + 6n \text{ opérations.}$$

3) On obtient $R_1, \dots, R_n$ de la même façon avec un nbre d'opérations de :

$$\mathcal{N}(n) = N(n) + N(n-1) + \dots + N(1)$$

$$= 4\underbrace{(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2)}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 6\underbrace{(n + (n-1) + \dots + 1)}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\mathcal{N}(n) = \frac{n(n+1)(4n+11)}{3}$$

4) Le produit de 2 matrice carrées $n \times n$ requiert $n^2(2n-1)$ opérations, donc celui de $R_n \dots R_1 A$ et $R_n \dots R_1 b$ nécessiteront :

$$n^3(2n-1) + n^2(2n-1) = n^2(2n-1)(n+1) \text{ opérations.}$$

5) Enfin, la résolution d'un système triangulaire $Tx' = b'$ nécessite n^2 opérations.

Ccl : la méth. de Householder nécessite au maximum

$$\mathcal{N}(n) + n^2(2n-1)(n+1) + n^2 = \mathcal{S}(n)$$

opérations au total.

On note que c'est $\mathcal{N}(n) = O\left(\frac{4n^3}{3}\right)$ (→ ou le livre de capes), alors que $\mathcal{S}(n) = O(2n^4)$.

Comparaison avec le Pivot de Gauss :

Passer du système $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ au système $\begin{cases} a'_{11}x_1 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ 0 + a'_{22}x_2 + \cdots = b'_2 \\ \vdots \\ 0 + a'_{n2}x_2 + \cdots = b'_n \end{cases}$

demande $(2n+1)(n-1)$ opérations, soit : $\tau(n) = 2n^2 - n - 1$.

Le passage d'un système $n \times n$ à un système triangulaire par la méthode de Gauss demandra donc :

$$\begin{aligned} \tau(n) + \cdots + \tau(2) &= 2n^2 - n - 1 + \cdots \\ &= 2(n^2 + \cdots + 2^2) - (n + \cdots + 2) - (n-1) \\ &= 2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \frac{(n+2)(n-1)}{2} - n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{(n+2)(n-1)}{2} - n - 1 \end{aligned}$$

ce qui est un $O\left(\frac{2n^3}{3}\right)$, à comparer avec $\mathcal{N}(n) = O\left(\frac{4n^3}{3}\right)$ ci-dessus.

Ccl : Les 2 méthodes sont comparables.